

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL

ENSEÑANZA DEL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL

AUTORES: Ángela Mercedes Martín Sánchez¹

Olga Lidia Pérez González ²

Yoan Martínez-López ³

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: olguitapg@gmail.com

Fecha de recepción: 03-02-2017

Fecha de aceptación: 23-08-2017

RESUMEN

Se desarrolla una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto Espacio Vectorial con el objetivo de lograr en el estudiante la coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto objeto de estudio. Se determinó una escala para valorar la coherencia lógica antes mencionada y se propusieron tres niveles de desarrollo (formación, transformación y conversión), con sus correspondientes criterios evaluativos. Se describe la implementación de la propuesta y se hace un estudio experimental, longitudinal y prospectivo, donde la variable independiente fue manipulada por los investigadores. Los resultados muestran que en los grupos donde se implementó la propuesta los estudiantes tienen mejores resultados pues hay mayor proporción de estudiantes en los niveles de transformación y conversión. Se recomienda investigar los efectos de la propuesta utilizando las tecnologías de la información y las comunicaciones.

PALABRAS CLAVE: espacios vectoriales; registros de representación semiótica; álgebra lineal; propuesta didáctica

DIDACTIC PROPOSAL FOR TEACHING THE VECTOR SPACE

ABSTRACT

A didactic proposal is developed for teaching of the concept of Vector Space with the aim of achieving in the student the logical coherence in the argumentation of the existing relationships between the registers of analytical, geometric and structural representation of the concept under

¹ Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana. e-mail: m.angela24@gmail.com.

² Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Cuba. e-mail: olguitapg@gmail.com.

³ Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Cuba. e-mail: yoan.martinez@reduc.edu.cu.

study. A scale was determined to assess the above-mentioned logical coherence and three levels of development (training, transformation and conversion) were proposed, with their corresponding evaluative criteria. This article describes the implementation of the proposal and makes an experimental, longitudinal and prospective study, where the independent variable was manipulated by the researchers. The results show that in the groups where the proposal was implemented the students have better results. The results also show a higher proportion of students in transformation and conversion levels. It is recommended to investigate the effects of the proposal using information and communication technologies.

KEYWORDS: vector spaces; semiotic representation registers; linear algebra; didactic proposal

INTRODUCCIÓN

El perfeccionamiento de la educación superior es una de las exigencias de la sociedad actual para elevar el rigor y efectividad del proceso de enseñanza aprendizaje de las diferentes asignaturas que deben cursar los estudiantes universitarios (Cuesta, Escalante, y Méndez, 2013; Ricardo y Daysi, 2016).

En respuesta a dichas exigencias, son variadas las propuestas para perfeccionar el proceso de enseñanza de la Matemática por las dificultades que tradicionalmente presentan los estudiantes con esta asignatura; se destacan entre ellas las dirigidas a los recursos didácticos para la enseñanza de la Geometría (Pivatto y De-Carvalho, 2014), estrategias para la resolución de problemas matemáticos (Alvarez, Alonso, Salgado, 2016), al desarrollo y sentido algebraico (Aké, Godino, Fernández y Gonzato, 2014; Planas, 2013) y alternativas metodológicas para favorecer el trabajo independiente (Ricardo y Daysi, 2016), entre otras.

Se destacan las propuestas relacionadas con el perfeccionamiento del Álgebra Lineal, (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2016; Vázquez, Romo, Romo-Vázquez y Trigueros, 2016), que investigan sobre el de la enseñanza de las matemáticas del profesor, abordando el Álgebra Lineal, así como sus aplicaciones con la práctica ingenieril.

De forma general, las investigaciones actuales evidencian que es una de las asignaturas en las que los estudiantes tienen mayores dificultades, fundamentalmente en la formación conceptual, de manera que se aprecia un fuerte predominio de la comprensión instrumental y se evidencian insuficiencias en su concepción didáctica, entre las cuales predominan las propuestas relacionadas con la formación y comprensión del concepto Espacio Vectorial (Dorier & Sierpinska, 2001; Parraguez, 2009; Oktaç & Trigueros, 2010; Parraguez, 2013; Souto, 2013; Parraguez & Uzuriaga, 2014; Uzuriaga & Martínez, 2016; Iglesias & Alonso, 2017).

Este concepto permite relacionar otros que son objeto de estudio en el Álgebra Lineal, como son dependencia lineal, base, generador, dimensión, coordenada de un vector en una base y transformación lineal, por lo que su tratamiento didáctico es de suma importancia para que los estudiantes puedan distinguir e interpretar las relaciones conceptuales que se establecen entre todo el sistema de conocimiento (Hernández, 1989).

Pero, las insuficiencias en el tratamiento didáctico en la formación del concepto Espacio Vectorial, han conllevado a que los estudiantes hagan mayor énfasis en la utilización de procedimientos algorítmicos, tengan dificultades en la comprensión del significado del concepto, y con la manipulación y argumentación de sus diferentes representaciones semióticas, pues manipulan mecánicamente la representación simbólica de este concepto como si fuera un objeto en sí mismo, sin comprender su significado y sin percibir las relaciones entre sus diferentes representaciones (Dorier & Sierpiska, 2001).

La presente investigación desarrolla una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto Espacio Vectorial con el objetivo de lograr en el estudiante la coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El sustento teórico de la investigación estuvo relacionado con la transferencia de registros semióticos, a partir del postulado siguiente: "hay comprensión y apropiación de un concepto matemático si el estudiante logra independizar el objeto matemático de sus diferentes representaciones" (Radford, 2013; Duval, 2006), y si esto se cumple, entonces, será posible desarrollar en el estudiante la siguiente cualidad: "coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los diferentes registros de representación semiótica del objeto matemático".

Lo anterior tiene su sustento en las investigaciones de Duval (2013) y Radford (2016), quienes en síntesis plantean que estas representaciones son el medio para que el estudiante materialice sus conocimientos, y pueda hacerlos accesibles a los demás, y además, que estas transferencias son la vía idónea para propiciar la apropiación de los conceptos por parte de los estudiantes.

Estos autores plantean que la comprensión e interiorización de los registros de representación semiótica y la transferencia entre ellos, constituyen las herramientas que necesita el estudiante para su actividad matemática, pues dada la generalidad de los objetos matemáticos, esta es esencialmente una actividad simbólica, por lo que los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción del estudiante y no es posible enseñarlos sin recurrir a la noción de representación.

Lo anterior conlleva a la necesidad de concebir propuestas didácticas donde lleve al estudiante a transitar por diferentes niveles, o estadios de desarrollo, de forma tal que primero pueda trabajar con la formación de una representación que puede identificarse como perteneciente a un registro dado; en un segundo estadio, el proceso y transformación de una representación dentro del registro donde fue creado, y finalmente la conversión, es decir, la transformación de una representación semiótica de un registro a otro.

PROPUESTA DIDÁCTICA

La función de la propuesta didáctica fue preparar al estudiante para caracterizar el concepto de Espacio Vectorial a través de diferentes registros de representación semiótica, así como para comprender que la forma en que existen los vectores de un Espacio Vectorial es a través de la combinación lineal.

Esta orientación se hizo para que el estudiante comprendiera la formación de representaciones del concepto en sus registros: analítico, geométrico y estructural y el tratamiento de cada una de las representaciones, el cual consistió en la transformación de la representación dentro de un mismo registro, así como la conversión de las diferentes representaciones para favorecer la coordinación entre los diferentes registros.

La propuesta estuvo compuesta por tres etapas: la primera dirigida a la orientación analítica del concepto Espacio Vectorial, cuya función fue orientar al estudiante para caracterizar el concepto como un conjunto formado por conjuntos ordenados de números de la forma, que cumplen las operaciones y axiomas propios de la estructura algebraica correspondiente al Espacio Vectorial.

La orientación geométrica del concepto Espacio Vectorial fue la segunda etapa, y su función fue orientar al estudiante para caracterizar el concepto como el conjunto de vectores representados geoméricamente en el plano cartesiano o en el espacio tridimensional, que cumplen las operaciones y axiomas propios de la estructura algebraica Espacio Vectorial.

Y, por último, la etapa de orientación estructural del concepto Espacio Vectorial tuvo la función de orientar al estudiante para caracterizar el concepto como una estructura algebraica.

Para el desarrollo de estas tres etapas se propició que el estudiante interpretara que la coordinación de los procesos relacionados con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar perteneciente a un cuerpo numérico K , es esencial para que emerja el concepto de Espacio Vectorial, y que la forma existencial de los vectores dentro de estos espacios es la combinación lineal de vectores.

De ese punto de vista se realizaron tareas que el estudiante realizara la conversión entre las representaciones estructural, geométrica y analítica, conservando el significado de cada representación y develando su relación con la combinación lineal de vectores, pero al mismo tiempo se trabajó la representación reflexiva de este concepto para que reconocieran que en cualquiera de sus formas de representación semiótica, su esencia es generalizar todos sus elementos como una combinación lineal de vectores.

IMPLEMENTACIÓN PRÁCTICA

El objetivo de la implementación fue lograr en el estudiante una coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los diferentes registros de representación del concepto Espacio Vectorial. Para ello se utilizó la combinación lineal de vectores como hilo conductor (Hernández, 1989), pues permitió mostrar el aspecto común entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial, evidenciando las relaciones existentes entre ellos, y de esta forma orientar al estudiante para argumentar estas relaciones.

El hilo conductor permitió estructurar las acciones didácticas de forma tal que el contenido de estas propició que el estudiante comprendiera que el concepto de combinación lineal emerge de la construcción del concepto Espacio Vectorial, a través de la coordinación de los procesos relacionados con las operaciones de suma y multiplicación de vectores por un escalar perteneciente a un cuerpo numérico, lo cual se puede analizar desde lo analítico, lo geométrico y lo estructural.

Se implementaron acciones didácticas dirigidas a preparar al estudiante para:

Desde lo analítico:

- Interpretar la suma de "n-uplas" y el producto de un número real por una "n-uplas" como operaciones binarias en dicho conjunto, y contextualizar reflexivamente los axiomas de la estructura de Espacio Vectorial en el conjunto R_n .
- Interpretar que cuando se suman las componentes de dos vectores multiplicados por escalares pertenecientes a un cuerpo numérico K se obtiene un nuevo vector que es una combinación lineal de los vectores involucrados.

Desde lo geométrico:

- Comprender que geoméricamente la suma de dos vectores u y v es un nuevo vector, cuya construcción viene dada por la regla del paralelogramo, y el producto de un número real por un vector v es un nuevo vector, que tiene la misma dirección que v y el mismo sentido que v si, o sentido opuesto.

- Contextualizar reflexivamente los axiomas de la estructura de Espacio Vectorial en los conjuntos R^2 y R^3 .
- Interpretar que, si se realizan las operaciones con un número finito de vectores, se puede siempre obtener un nuevo vector que resulte de expandir o contraer cada uno de los vectores, luego sumar los vectores resultantes como una combinación lineal de estos y que las características de estos vectores pueden hacerse extensivas al conjunto R^n , aunque ya no se pueda materializar geoméricamente.

Desde lo estructural:

- Materializar y recodificar las operaciones binarias en elementos cualesquiera de un conjunto relacionándolo con la combinación lineal de vectores.
- Realizar la contextualización reflexiva de los axiomas de las estructuras algebraicas en un conjunto cualquiera para analizar si las propiedades que posee corresponden a la estructura del Espacio Vectorial y explicitar la relación que existe entre la estructura algebraica cuerpo y el concepto de Espacio Vectorial.
- Representar un conjunto sobre el cual se han definido previamente las operaciones binarias de suma y multiplicación por un escalar perteneciente a un cuerpo numérico K , que satisfacen los axiomas de grupo aditivo abeliano, y los axiomas de distributividad para la multiplicación que relacionan ambas operaciones

En todas las acciones didácticas anteriores se condujo al estudiante hacia una representación reflexiva del concepto Espacio Vectorial en cualquiera de sus registros de representación semiótica como un sistema que tiene una estructura constituida por tres elementos:

- Conjunto.
- Operaciones binarias.
- Axiomas.

Se establece entre ellos una relación de jerarquía y subordinación, de manera que los axiomas el elemento de mayor jerarquía, y para que reconociera que su funcionalidad es la generalización de todos sus elementos como una combinación lineal de vectores, estas relaciones deben dar lugar a que el estudiante manifieste coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial, lo que significa que se podrá representar el concepto de Espacio Vectorial desde lo analítico, lo geométrico y lo estructural, para que el estudiante comprenda que la forma

en que existen los vectores de un Espacio Vectorial es a través de la combinación lineal.

Como parte de la propuesta se hizo necesario tener una escala para valorar el efecto en los estudiantes, por eso se usó de referencia la investigación de Báez, Martínez, Pérez y Pérez (2017) y se aplicó un criterio de expertos para precisar los niveles para evaluar la coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial, como se puede apreciar en la Tabla 1.

Tabla 1 Niveles de coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial (elaborada por los autores)

Nivel	Característica del nivel	Objetivos de las tareas/criterios valorativos
Nivel 1: Formación	Como la expresión del nivel primario en el desarrollo de la coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial, donde se trabaja cada una de las representaciones (analíticas, geométricas y estructurales) del concepto. Espacio Vectorial.	<ul style="list-style-type: none"> • El estudiante reconoce, identifica, describe y argumenta que los Espacios Vectoriales están constituidos por tres elementos: conjunto, operaciones binarias y axiomas. • El estudiante contextualiza desde lo analítico, lo geométrico y lo estructural los axiomas de la estructura de Espacio Vectorial en el conjunto R_n. • El estudiante identifica el concepto de Espacio Vectorial en el registro analítico, geométrico y estructural.
Nivel 2: Transformación	Como la expresión del nivel primario en el desarrollo de la coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico	<ul style="list-style-type: none"> • El estudiante establece relaciones conceptuales, entre los diferentes axiomas y las operaciones para cada uno de los registros de representación del concepto Espacio Vectorial (analítico, geométrico o estructural). • El estudiante reconoce,

	<p>y estructural del concepto Espacio Vectorial, donde se transforma cada una de las representaciones del concepto Espacio Vectorial, dentro del mismo registro donde fue creado (analítico, geométrico o estructural).</p>	<p>identifica, describe y argumenta que la combinación lineal de vectores es el hilo conductor que permite mostrar el aspecto común entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El estudiante pone ejemplos de otros Espacios Vectoriales, en cualquiera de los registros de representación del concepto, reflexionando sobre su estructura interna y su relación con la combinación lineal de vectores.
<p>Nivel 3: Conversión</p>	<p>Es el más alto indicio de desarrollo de la coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial, donde se transforma de un registro a otro, cada una de las representaciones (analítico, geométrico y estructural) del concepto Espacio Vectorial.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • El estudiante reconoce, identifica, describe y argumenta las relaciones existentes entre los diferentes registros de representación del concepto Espacio Vectorial, de manera que utiliza la combinación lineal de vectores como el hilo conductor que permite mostrar el aspecto común entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural • El estudiante reconoce, identifica, describe y argumenta las unidades significantes de un registro de representación del concepto Espacio Vectorial, para corroborar o verificar los resultados obtenidos en otro registro de representación del concepto. • El estudiante transforma una representación dada, del concepto Espacio Vectorial, en otra representación en un registro diferente, que conserva

		el significado de la representación inicial, pero al mismo tiempo da otras significaciones al objeto representado.
--	--	--

VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA

En la investigación se asumió la concepción de Pérez (2006) de que la evaluación del aprendizaje es una de las funciones de la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje, que se concibe desde la planificación y organización del sistema de tareas.

Esta concepción de la evaluación plantea como una de sus premisas teóricas el hecho de que el sistema de evaluación se basa en el diseño del sistema de tareas que debe desarrollar el estudiante, lo que justifica que los objetivos y características de las tareas diseñadas en esta investigación se hicieran corresponder con los criterios evaluativos.

Lo anterior justificó que el contenido de cada una de las tareas que desarrollaron los estudiantes se correspondió con cada uno de los criterios valorativos declarados en la Tabla 1, y la secuencia de esas tareas tuvo la lógica del tránsito por los niveles declarados, de forma tal que el estudiante transitara del nivel de formación, al de transformación, hasta llegar al nivel de conversión.

Algunos de las tareas desarrolladas en la validación de la propuesta fueron:

- Dado un conjunto de R_n en el cual se definen dos operaciones, solicitar al estudiante que identifique, describa y argumente qué es un Espacio Vectorial, de manera que contextualice sus acciones desde lo analítico, lo geométrico y lo estructural (Nivel 1).
- Dado un Espacio Vectorial en diferentes registros de representación (analítico, geométrico o estructural), solicitar al estudiante que reflexione y argumente sobre las relaciones que existen entre los diferentes axiomas y las operaciones, para que describa y argumente que la combinación lineal de vectores es el hilo conductor que permite mostrar el aspecto común entre los diferentes registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial (Nivel 2).
- Solicitar al estudiante que investigue y proponga ejemplos de Espacios Vectoriales, en cualquiera de los registros de representación del concepto, de forma tal que reflexione y explique su estructura interna y su relación con la combinación lineal de vectores (Nivel 2).

- Proponer al estudiante ejemplos de Espacios Vectoriales en sus tres formas de representación (analítico, geométrico y estructural), y solicitarle que identifique, describa y argumente las relaciones existentes entre los diferentes registros de representación, y que en su argumentación utilice la combinación lineal de vectores como el hilo conductor para mostrar el aspecto común entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural (Nivel 3).
- Solicitar al estudiante que demuestre que un conjunto dado es un Espacio Vectorial, utilizando el registro de representación que desee, debe describir y argumentar su demostración, y que corroborar o verificar los resultados obtenidos utilizando otro registro de representación del concepto (Nivel 3).
- Solicitar al estudiante que investigue y proponga ejemplos de Espacios Vectoriales, en cualquiera de los registros de representación del concepto, y que lo transforme a otro registro de representación, para argumentar que se conserva el significado de la representación inicial, pero al mismo tiempo da otras significaciones al objeto representado, que puede ser el significado analítico, el geométrico o el estructural (Nivel 3).

METODOLOGÍA DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL

Para evaluar el nivel de coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural del concepto Espacio Vectorial de cada estudiante, se seleccionaron 25 expertos de diferentes lugares y grados científicos mediante la aplicación del método Delphi, para validar los niveles anteriormente descritos y se obtuvo que los niveles y sus criterios evaluativos son adecuados para el objetivo de la investigación.

Para el experimento se asumió la metodología de Triana-Hernández (2014), por lo que se realizó un estudio longitudinal y prospectivo, donde la variable independiente fue manipulada por los investigadores (Triana-Hernández, 2014). El grupo de control como el experimental se estudian en el siguiente período de tiempo: cursos académicos 2011-2012, 2012-2013, 2013-2014, en los cuales no se aplicó la propuesta didáctica, mientras que en los cursos académicos 2014-2015 y 2015-2016 fue implantada.

Para analizar si existen diferencias significativas entre los diferentes grupos de estudiantes de los diferentes cursos se realizaron las comparaciones mediante pruebas de independencias de Chi-cuadrado (χ^2), implementados en script escritos en el lenguaje estadístico R, el cual es considerado como un entorno y lenguaje de programación, con enfoque al análisis estadístico (Pearson, 1900; Kleiber y Zeileis, 2008)

Se contrastaron dos hipótesis, una nula (H_0) y otra alternativa (H_1) (Pearson, 1900), considerando como referencia la investigación de Pérez (2006), se plantearon las siguientes hipótesis para esta investigación:

- Hipótesis nula, H_0 : No hubo diferencia significativa entre la proporción de alumnos en el nivel 3 y 2 entre el curso X y el Y.
- Hipótesis alternativa, H_1 : El grupo del curso Y tuvo una mayor proporción de alumnos en el nivel 3 y 2 que el del curso X.
- Considerando $\alpha=0.05$ y el número total de alumnos de la muestra M, se analizó que si el p -value $< \alpha$, se rechaza H_0 y se acepta H_1 , y en caso contrario se acepta H_0 .

Usando el lenguaje de programación R, se implementaron los scripts que permitieron realizar el test de Chi-cuadrado de Pearson, se utilizaron tablas de contingencias para determinar si existían diferencias significativas entre los diferentes grupos de estudiantes.

Un ejemplo de los script implementados es el siguiente, el cual fue utilizado para comparar los grupos de estudiantes de los cursos 2013-2014 y 2015-2016:

```
control<- c(3,8,17)
experimental<-c(10,16,9)
estudiantes<-c("Curso 2013-2014", "Curso 2015-2016")
evaluaciones<-c("Nivel 3","Nivel 2","Nivel 1")
Matriz <- as.table(rbind(control,experimental))
dimnames(Matriz)<-
list(estudiante=estudiantes,evaluacion=evaluaciones)
(Xsq<-chisq.test(Matriz))
Xsq$observed
Xsq$expected
Xsq$residuals
Xsq$stdres
```

RESULTADOS

Los cursos académicos con el porcentaje de estudiantes clasificados en el nivel 1 fueron 2012-2013, 2011-2012 y 2013-2014, en los cuales no se había implementado la propuesta; sin embargo, luego de haberse aplicado en los cursos 2014-2015 y 2015-2016, se disminuye el porcentaje de estudiantes clasificados en el nivel 1 y aumenta el porcentaje de los estudiantes en el nivel 2 y 3, de manera que el curso 2015-2016 es el de mayor proporción entre los estudiantes en los niveles 2 y 3 con respecto al nivel 1 (Fig. 1).

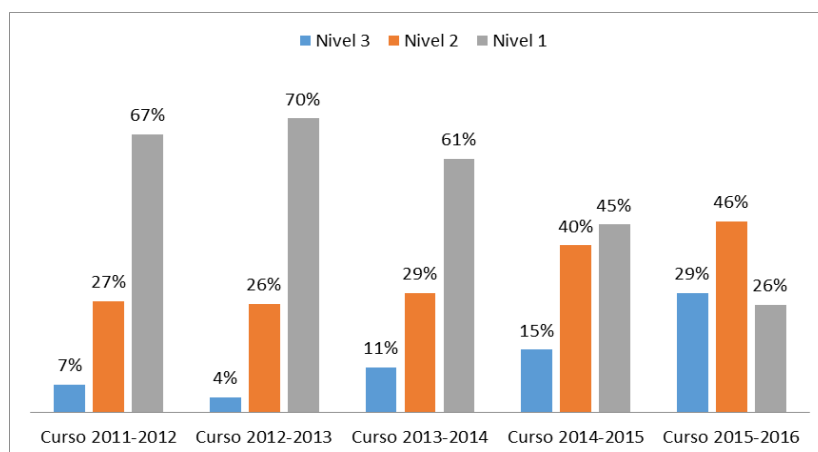


Figura 1 Clasificación de los estudiantes por niveles (elaborado por los autores)

Los resultados obtenidos en las comparaciones de los estudiantes de los distintos cursos muestran que los p-value del curso 2015-2016 con los cursos 2011-2012, 2012-2013 y 2013-2014 son menores que $\alpha=0.05$, por lo que se rechaza H_0 y se aceptó H_1 , y se concluyó que hubo una mayor proporción de estudiantes con nivel 3 y 2 en el curso 2015-2016.

Sin embargo, para la comparación del curso 2015-2016 y 2014-2015, el p-value $> \alpha$, por lo que se acepta H_0 , considerándose que no hubo diferencia significativa entre la proporción de estudiantes en el nivel 3 y 2, lo cual es lógicamente aceptable ya que en estos dos cursos es donde se implementó la propuesta.

Tabla 2 Resultados obtenidos en las comparaciones de los estudiantes (elaborada por los autores)

Cursos académicos	χ^2	p-value	H_0
2011-2012 vs 2012-2013	0.26849	0.8744	Acepta
2011-2012 vs 2013-2014	0.37472	0.8291	Acepta
2011-2012 vs 2014-2015	3.413	0.1815	Acepta
2011-2012 vs 2015-2016	11.858	0.00266 1	Rechaza
2012-2013 vs 2013-2014	1.16	0.5599	Acepta
2012-2013 vs 2014-2015	4.7777	0.09174	Acepta
2012-2013 vs 2015-2016	13.652	0.00108 5	Rechaza
2013-2014 vs 2014-2015	1.6283	0.443	Acepta
2013-2014 vs 2015-2016	8.2212	0.0164	Rechaza
2014-2015 vs 2015-2016	3.683	0.1586	Acepta

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Se infiere de los resultados obtenidos que los estudiantes comprendieron la utilidad de trabajar los cambios de representaciones semióticas, tanto dentro de un mismo registro (nivel 2), como entre diferentes registros de representación (nivel 3), y que incorporaron este tipo de actividad como herramientas para su trabajo matemático, contribuyéndose al desarrollo y consolidación de un correcto lenguaje algebraico, como vía fundamental para el desarrollo del pensamiento y de la comunicación del concepto Espacio Vectorial.

Se logró, además, que los estudiantes identificaran el concepto en variadas formas de representación, determinaran las características y elementos esenciales del concepto en diferentes formas, reconociendo a la combinación lineal como hilo conductor como la célula que genera al concepto de Espacio Vectorial.

Teniendo en cuenta los presupuestos de Duval (2006), Radford (2013) y Godino, Batanero y Font (2007) de que no hay comprensión ni apropiación de un concepto matemático si este no se independiza de sus representaciones, entonces se confirmó que la mayoría de los estudiantes comprendieron y se apropiaron del concepto de Espacio Vectorial.

Sin embargo, no se desestimó la existencia de un considerable número de estudiantes que quedan en el nivel 1, que aunque reconocen, identifican, describen y argumentan que los Espacios Vectoriales están constituidos por tres elementos (conjunto, operaciones binarias y axiomas), contextualizan los axiomas en el conjunto R_n , identifican el concepto en el registro analítico, geométrico y estructural, no logran alto nivel de desarrollo de la coherencia lógica en la argumentación de las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural.

CONCLUSIONES

Se demostró que en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto Espacio Vectorial el objetivo no ha de ser que el estudiante lo describa, es importante lograr en él la comprensión de dicho concepto y la coherencia al argumentar las relaciones existentes entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural.

Esta coherencia debe distinguirse por los siguientes aspectos:

- Argumentación de las relaciones existentes entre los diferentes registros de representación del concepto Espacio Vectorial, utilizando la combinación lineal de vectores como para mostrar el aspecto común entre los registros de representación analítico, geométrico y estructural
- Argumentación de las unidades significantes de cada registro de representación del concepto Espacio Vectorial, para explicar los

resultados obtenidos en otro registro de representación del concepto.

Es recomendable el estudio de otras propuestas que expliquen las formas y herramientas que permitan articular su uso en el desarrollo de las actividades docentes y en la orientación del trabajo de los estudiantes, con el apoyo de las tecnologías de la información y las comunicaciones.

Agradecimiento sobre la financiación o fuente del artículo

Agradecimiento al apoyo brindado al Proyecto Nacional del Departamento de Matemática de la Universidad de Camagüey, "Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática" (código PP221LH053), asociado al Programa Nacional Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano. Perspectivas de desarrollo, del Ministerio de Educación de Cuba.

REFERENCIAS

- Aké, L., Godino, J., Fernández, T., & Gonzato, M. (2014). *Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación*. Avances de Investigación en Educación Matemática (3), 25-48.
- Alvarez, J., Alonso, I., & Salgado, A. (2016). *Resolución de problemas matemáticos en la licenciatura en educación matemática-física*. Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa (REFCaIE), 4(1), 67-82.
- Báez, A., Martínez, Y., Pérez, O., & Pérez, R. (2017). *Propuesta de Tareas para el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería*. Formación Universitaria, 10(3).
- Cuesta, A., Escalante, J., & Méndez, M. (2013). *Impacto de los cursos universitarios en la formación de competencias algebraicas*. Educación matemática, 25(1), 35-62.
- Dorier, J., & Sierpinska. (2001). *Research into the teaching and Learning of Linear Algebra*. Academic Publisher. Países Bajos, 225-273.
- Duval, R. (2006). *Quell es sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques*. Revista Latinomaericana de Matemática Educativa (Número Especial 1), 45-81.
- Duval, R. (2016). *Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática*. REVEMAT. Florianópolis, 11(2), 1-78.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). *The onto-semiotic approach to research in mathematics education*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39(1-2), 127-135.
- Hernández, H. (1989). *El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática Superior Cubana. Experiencias en el Álgebra Lineal*. Universidad de la Habana. Habana.
- Iglesias, N., & Alonso, I. (2017). *Estudio exploratorio sobre la importancia de la matemática para la carrera de ingeniería civil en la universidad de oriente*. Revista Electrónica de Formación y Calidad Educativa, 5(1).
- Kleiber, C., & Zeileis, A. (2008). *Applied econometrics with R*. Springer Science & Business Media.
- Okaç, A., & Trigueros, M. (2010). *¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal?*. Revista Latinomaericana de Matemática Educativa, 13(4-II), 373-385.
- Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto Espacio Vectorial*. Tesis Doctoral, CINVSTAV, Departamento de Matemática Educativa, México.
- Parraguez, M. (2013). *El rol del cuerpo en la construcción del concepto Espacio Vectorial*. Revista Educación Matemática, , 25(1), 133-154.
- Parraguez, M., & Uzuriaga, V. (2014). *Construcción y uso del concepto de combinación lineal de vectores*. Scientia et Technica Año XIX, 19(3).

- Pearson, K. (1900). *On a criterion that a given system of deviations from the probable in the case of correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling*. Philosophical Magazine, 157-75.
- Pérez, O. (2006). *¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas?* Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(2), 267-297.
- Pivatto, W., & De-Carvalho, S. (2014). *Livros didáticos de matemática: análise dos recursos didáticos auxiliares para a aprendizagem de conceitos Elementares de geometria não euclidiana*. Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa (REFCaE), 2(3), 93-106.
- Planas, N. (2013). *Iniciación al lenguaje algebraico en aulas multilingües: Contribuciones de un proyecto en desarrollo*. Avances de Investigación en Educación Matemática (5), 25-44.
- Radford, L. (2013). *On Semiotics and Education*. *Éducation et Didactique*, 7(1), 185-204.
- Ricardo, J., & Daysi, R. (2016). *Alternativa metodológica para favorecer el trabajo independiente como tarea docente a través de la asignatura Matemática Financiera*. Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa (REFCaE), 4(3), 167-182.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de Álgebra Lineal*. Educación matemática, 28(2), 151-174.
- Souto, B. (2013). *La enseñanza de la visualización en Álgebra Lineal: el caso de los Espacios Vectoriales*. Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.
- Triana-Hernández, B. (2014). *La disciplina Química para la formación ambiental del ingeniero agrónomo*. Revista Cubana de Química, 263, 259-275.
- Uzuriaga, V., & Martínez, A. (2016). *Un ejemplo de evaluación desde un enfoque desarrollador, caso Álgebra Lineal*. Revista Scientia et Technica, 21(3), 264-268.
- Vázquez, R., Romo, A., Romo-Vázquez, R., & Trigueros, M. (2016). *La separación ciega de fuentes: un puente entre el Álgebra Lineal y el análisis de señales*. Educación matemática, 28(2), 31-57.