

## **MÉTODO DIDÁCTICO PARA REFORZAR EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO-DEDUCTIVO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE DEMOSTRACIÓN**

AUTORES: Juan Álvarez Esteven<sup>1</sup>

Isabel Alonso Berenguer<sup>2</sup>

Alexander Gorina Sánchez<sup>3</sup>

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: [ialonso@uo.edu.cu](mailto:ialonso@uo.edu.cu)

Fecha de recepción: 11-02-2018

Fecha de aceptación: 23-08-2018

### RESUMEN

El presente trabajo es parte de una investigación doctoral y tuvo como objetivo la presentación de un método didáctico para orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración. El mismo se elaboró utilizando el Método Sistémico-Estructural-Funcional y es contentivo de un sistema de procedimientos didácticos que se constituye en su núcleo dinamizador, el que está estructurado en tres procedimientos que orientan a profesores y estudiantes para la formación de habilidades resolutoras de problemas matemáticos de demostración. El método didáctico está en condiciones de ser aplicado para perfeccionar el citado proceso de enseñanza-aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: método didáctico; resolución de problemas matemáticos; demostración matemática; razonamiento inductivo; razonamiento deductivo.

## **DIDACTIC METHOD TO REINFORCE THE INDUCTIVE-DEDUCTIVE REASONING IN MATHEMATICAL PROBLEMS SOLVING OF DEMONSTRATION**

### ABSTRACT

The present work is part of a doctoral research and had as its objective the presentation of a didactic method to guide the teaching-learning process of inductive-deductive reasoning in mathematical problems solving of

---

<sup>1</sup> Licenciado en Educación, Especialidad Matemática, Máster en Ciencias de la Educación, Profesor Asistente. Universidad de Oriente. Santiago de Cuba, Cuba. E-mail: [jalvarez@uo.edu.cu](mailto:jalvarez@uo.edu.cu)

<sup>2</sup> Licenciada en Matemática, Doctora en Ciencias Pedagógicas, Profesora Titular. Universidad de Oriente. Santiago de Cuba, Cuba. E-mail: [ialonso@uo.edu.cu](mailto:ialonso@uo.edu.cu)

<sup>3</sup> Licenciado en Matemática, Doctor en Ciencias Pedagógicas, Profesor Titular. Universidad de Oriente. Santiago de Cuba, Cuba. E-mail: [gorina@uo.edu.cu](mailto:gorina@uo.edu.cu)

demonstration. It was developed using the Functional-Structural-Systemic Method and is content of a system of didactic procedures that is constituted in its dynamizing nucleus, which is structured in three procedures that guide teachers and students for the formation of a skills in mathematical problem solving of demonstration. The didactic method is able to be applied to perfect the aforementioned teaching-learning process.

**KEYWORDS:** didactic method; mathematical problems solving; mathematical demonstration; inductive reasoning; deductive reasoning.

## INTRODUCCIÓN

La creciente complejidad de los resultados matemáticos que se emplean actualmente para dar respuesta a las exigencias de la sociedad, demanda de una alta rigurosidad en el conocimiento de los estudiantes de las carreras universitarias de ciencias exactas, encargados de aplicar y enseñar tales resultados. Lo anterior conduce a la necesidad de prepararlos en el uso de métodos eficientes para la resolución de los problemas matemáticos que se les presentarán en su vida profesional (Álvarez, Alonso & Gorina, 2012).

Una profundización en la literatura sobre el tema permite comprobar que son numerosos los trabajos orientados al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos; entre estos podrían citarse: Polya (1966); Schoenfeld (1985); Godino & Recio (2001), Alonso (2001), Beyer (2008), Gorina & Domínguez (2012); Alonso, Gorina & Santiesteban (2012); Cabrales, Silva & Domínguez (2016). A pesar del interés existente por el estudio de esta temática, aún se observan dificultades en este proceso, esencialmente en lo relativo al aprendizaje de los problemas de demostración (Álvarez, Alonso & Gorina, 2012; Álvarez, Alonso & Salgado, 2016).

Por tal razón surge la necesidad de profundizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos de demostración, con métodos que eleven su efectividad, dotando a los estudiantes de conocimientos y habilidades asociados a esta compleja actividad resolutoria, de manera que puedan aplicar estrategias heurísticas y metacognitivas para concebir y demostrar conjeturas y dar solución a estos problemas, alcanzando los objetivos formativos previstos en sus planes de estudio.

En esta dirección, las perspectivas de análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de los citados problemas se fundamentan esencialmente en dos enfoques didácticos principales. El primero, orientado a la enseñanza de la parte deductiva de la demostración, obviando el razonamiento inductivo previo; y el segundo, que defiende la necesidad de enseñar al estudiante a realizar un análisis inductivo que le facilite avanzar hacia los procesos de demostración formal.

El primer enfoque es el más empleado en la actualidad en las aulas y en la gran mayoría de los libros de texto, a pesar del poco éxito que proporciona. Sobre este enfoque debe señalarse que los matemáticos en la redacción final de una demostración, por razones absolutamente válidas, generalmente no hacen referencia a todos los elementos previos involucrados en la construcción de una conjetura demostrable (Morales, 2008).

Sin embargo, desde un punto de vista didáctico no se coincide con ese modo de presentar y enseñar las demostraciones a los estudiantes, ya que se descarta la explicación de la actividad inductiva inherente al proceso de demostración, sesgando su comprensión y aprendizaje. Solo enfocarse en la parte deductiva, no ayuda a sistematizar el tipo de razonamiento inductivo previo, productor de experiencias inductivas claves para garantizar el éxito en la resolución de problemas matemáticos de demostración.

Lo anterior se refuerza en Bourbaki cuando se plantea: "todo matemático sabe que una demostración no será verdaderamente comprendida en tanto se limite a verificar paso a paso la corrección de las deducciones que en ella figuran, sin tratar de concebir claramente las ideas que condujeron a construir esta cadena de deducciones prioritariamente" (1948, p. 37).

Otra crítica a este enfoque es la que hace Larios (2002), al considerar que muchas veces se pretende que los alumnos hagan demostraciones tras algunos ejemplos expuestos por los profesores en los pizarrones, y precisa que: "en este proceso no se pide que el alumno construya conjeturas o elabore el enunciado que está siendo tomado en cuenta, sino únicamente que reconstruya el proceso que, previamente, alguien ha realizado" (Larios 2002, p. 50). Sin embargo, la demostración matemática tiene significado cuando constituye un reto intelectual para el estudiante, pues la demostración que alguien realizó, generalmente no brinda un cuadro completo de este proceso, al obviarse el camino inductivo que le antecedió.

El segundo enfoque, defendido por Polya (1966); Stacey & Groves (1999); Miyazaki (2000); Allen (2001); Bell et al. (2004), entre otros estudios, reconocen que el razonamiento inductivo debe ser introducido y trabajado como modo de actuación previa al razonamiento deductivo, propio de los procesos de demostración formal. Sin embargo, aun cuando en estos trabajos se hace tal reconocimiento, resultan insuficientes los instrumentos didácticos existentes que orienten al docente de matemática a introducir y potenciar dicho razonamiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos de demostración (Álvarez, Alonso & Gorina, 2012; Álvarez, Alonso & Salgado, 2016).

Al reconocer la insuficiente instrumentación didáctica señalada y al valorar lo complejo que para los profesores resulta concretar con efectividad estos enfoques e instrumentos en los escenarios docentes, surgió la necesidad de proponer nuevos instrumentos didácticos para potenciar el referido proceso.

Consecuentemente, el objetivo del presente trabajo fue la elaboración de un método didáctico para orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, encaminado a elevar a niveles cualitativamente superiores la actividad resolutora de los futuros egresados de las carreras universitarias de ciencias exactas.

## DESARROLLO

La significatividad del método didáctico (MD) que se propone está dada porque posibilita el desarrollo de habilidades para la exploración, validación y demostración de conjeturas matemáticas, desde la integración lógica de las vías inductiva y deductiva de solución de los problemas matemáticos de demostración (PMD).

El objetivo general del MD es la orientación intencional a los profesores y estudiantes sobre las vías didácticas para desarrollar la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, de forma tal que se eleve la actividad resolutora en estos problemas por parte de los futuros egresados de las carreras universitarias de ciencias exactas.

Su estructura interna contiene un primer estadio de desarrollo dirigido a la exploración inductiva, que hace especial énfasis en la identificación de propiedades invariantes de los problemas matemáticos de demostración y en la formulación de conjeturas sobre estos. El segundo estadio enriquece la dinámica del anterior, al sistematizar los métodos para el reforzamiento de las conjeturas matemáticas, a partir de la comprobación de su veracidad o falsedad. Finalmente, el tercer estadio se dedica a la demostración de las conjeturas matemáticas, a partir de la información obtenida en los dos anteriores, basándose en la apropiación significativa del proceder deductivo para dicha demostración. Todo ello con el propósito de que se eleve la actividad resolutora de problemas matemáticos de demostración en los futuros egresados de las carreras universitarias de ciencias exactas.

Los medios fundamentales que sirven de apoyo al MD son los propios problemas que se estudian, los que requieren de un proceso de exploración y validación inductiva antes de llegar a la demostración por la vía deductiva, de modo que se orienta a objetivos de análisis, identificación, profundización, valoración, representación, generalización y comprobación de la información que brindan los problemas, en interacción sistemática con la base de conocimientos y experiencias del estudiante resolutor.

Mediante la aplicación MD se puede interactuar con una amplia diversidad de problemas matemáticos de demostración, alejándose de la tendencia a asumir una metodología (inductiva o deductiva) independiente y explicitando sus resultados en la propia dinámica de su sistematización. Para su instrumentación se introduce un Sistema de Procedimientos Didácticos (SPD)

que se convierte en la estructura operacional del método propuesto, al establecer acciones concretas para lograr los objetivos.

Este SPD está sometido a múltiples influencias, que dan lugar a su rediseño y perfeccionamiento constante, por ello se considera un sistema semiabierto, el que está estructurado en tres procedimientos que interactúan entre ellos. Además posee los correspondientes criterios evaluativos y patrones de logro.

El SPD que dinamiza al MD manifiesta su recursividad en la relación dialéctica que se establece entre el todo, concebido por el SPD integral, y cada uno de los tres procedimientos didácticos, como partes de ese todo, donde el sistema en sí adquiere sentido de las partes y estas adquieren significado en el todo, determinándose su coherencia interna.

Asimismo, las habilidades resolutoras que se configuran en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de PMD, se conciben como una nueva cualidad totalizadora alcanzada, resultado de la sinergia que manifiesta la implementación del SPD. Mientras que la entropía del mismo se considera que puede manifestarse a partir de las insuficiencias que presentan algunos profesores para gestionar dicha dinámica, así como por la no aceptación de los cambios que trae la introducción del MD. Por su parte, la homeostasis o equilibrio dinámico del SPD, puede lograrse aprovechando las potencialidades que ofrecen las asignaturas matemáticas básicas para orientar la dinámica del procesamiento inductivo y deductivo de la información que brinda un PMD.

El SPD manifiesta su autodesarrollo en el carácter flexible que posee, el que facilita su rediseño constante por otros profesores, para adaptarlo a condiciones específicas de los contextos de aplicación, lo que implica un perfeccionamiento y enriquecimiento sistemático del mismo.

Los tres procedimientos no se consideran etapas preestablecidas, sino medios de construcción dinámica que contemplan la posibilidad de adaptación y enriquecimiento en la praxis docente, de manera que su ejecución no sigue un orden lineal, pueden irse realizando en paralelo acciones correspondientes a procedimientos diferentes, en varios momentos del referido proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos procedimientos son: el exploratorio-inductivo, el validador-inductivo y el demostrativo-deductivo.

#### *Procedimiento exploratorio-inductivo*

Acciones a realizar por el profesor:

- Realizar actividades docentes que propicien el desarrollo de habilidades para la adecuada selección y aplicación de estrategias heurísticas y metacognitivas durante el análisis de los PMD.

Para ello será necesario entrenar a los estudiantes en la observación detallada de la estructura del problema, la que puede estar compuesta por

objetos ideales (matemáticos) o por objetos reales (físicos). Debe enfatizarse en la identificación de las condiciones y exigencias del problema, así como en sus objetos, características y relaciones.

Algunas preguntas que pueden resultar útiles en esta etapa son: ¿Puedes explicar con tus propias palabras de qué trata el problema? ¿Qué componentes involucra este problema? ¿Cómo se relacionan los objetos del problema? ¿Cuáles son las condiciones y exigencias del problema? ¿Cómo te representas el problema? ¿Esta representación te sugiere alguna idea que quieras exponer? Este tipo de preguntas debe llevar a una idea hipotética que indique cual pudiera ser la conjetura inicial.

- Sistematizar una definición de problema matemático, de forma que los estudiantes puedan identificar los elementos y componentes de los problemas de demostración que se les proponen.

Será conveniente emplear una definición como la que se propone en Alonso (2001), es decir, *una situación que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias contentivas de una dificultad intelectual que origina en el resolutor la necesidad de darle respuesta, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias.*

- Promover la búsqueda consciente de patrones en los PMD y el descubrimiento de las leyes que rigen estos patrones. Para ello debe lograrse que los estudiantes aprendan a trabajar con casos particulares, a cómo pasar de esos casos particulares a una propiedad común (conjetura o hipótesis), a transferir propiedades de una situación a otra (analogía), a realizar diferentes representaciones del mismo PMD, a realizar transformaciones que lleven a una reducción del problema, entre otras estrategias heurísticas de gran utilidad para lograr la abstracción de invariantes que permitan llegar a conjeturas.
- Favorecer el intercambio, comunicación y contraste de ideas, aprovechando el trabajo en grupos pequeños donde se discutan PMD. Esto facilita que el estudiante vaya creando patrones de razonamiento inductivo para la conformación de conjeturas y su exteriorización.
- Facilitar que el estudiante desarrolle la capacidad de observar, percibir y abstraer. Para ello tendrá que llevarlos a realizar tareas docentes en las que tenga que comparar, representar, identificar, relacionar, combinar y generalizar, las cuales aportan al objeto matemático observado propiedades que contribuyen a la transformación del mismo para buscar una conclusión general que se constituya en conjetura del PMD.
- Propiciar el aprendizaje de estrategias metacognitivas para lograr que tomen conciencia de los factores involucrados en la comprensión y

solución de los PMD y en la construcción de su propio aprendizaje. Deberán procurar que tomen conciencia de sus habilidades y limitaciones, participen colaborativamente en la construcción del conocimiento matemático, entiendan la importancia de regular los procesos de su apropiación y progresen hacia una de independencia cognoscitiva.

- Será conveniente dejar que las ideas surjan en la mente de los estudiantes y que el profesor actúe tan sólo como un orientador que los dirija hacia el descubrimiento de la solución del PMD, para lo cual deberá preparar preguntas adecuadas, precisas, que no den margen a desviar la atención. Algunas de esas preguntas pueden ser: ¿Cuáles objetos matemáticos intervienen en el problema? ¿Qué regularidades existen entre los elementos objetos, características y relaciones del problema? ¿Cuáles son las condiciones y exigencias del PMD? ¿Han resuelto algún problema análogo al que ahora se presenta? ¿Qué conocimientos matemáticos relacionan a los elementos y los componentes del problema?
- Propiciar el desarrollo de habilidades para concebir y enunciar una idea hipotética a partir de la observación e interpretación de propiedades de determinados objetos de los PMD. Deberá proponer actividades docentes en las que los estudiantes tengan que intuir, predecir, generalizar, especializar y abstraer, las cuales llevarán al desarrollo de habilidades para formular una conclusión con un determinado nivel de confiabilidad.
- Desarrollar actividades docentes que activen los recursos motivacionales de los estudiantes, es decir, el interés, la actitud preocupada y ocupada del mismo en el proceso. Hacerles sentir el incentivo que produce la búsqueda de la solución un PMD que se ha hecho importante para el resolutor; creando un ambiente que favorezca el intercambio, la comunicación y el contraste de ideas.
- Hacer que el estudiante reflexione sobre sus procesos mentales y evalúe sus propios procesos de aprendizaje. Esto hace interactúe con los PMD y no los tome como una tarea aislada a la que no le encuentra un propósito claro. Algunas preguntas que pueden ayudar son: ¿Has resuelto antes algún PMD con cierto rasgo similar? ¿Por qué no analizar algún caso particular o un caso más general? ¿No podrá reducirse a un problema más simple? ¿Tal vez funcione la división en casos y la consideración por separado de cada uno de éstos? Explique ¿cómo llegó a esa conclusión? Trate de encontrar más de una forma de hacerlo.
- Propiciar la formación de estrategias de autocontrol. Para ello puede emplear preguntas como: ¿Qué estás haciendo? ¿Por qué lo estás haciendo? ¿Cómo eso te ayudará a formular una conjetura? ¿Qué harás con la conjetura cuando la tengas?

Criterio evaluativo para los profesores: eficacia de la orientación de estrategias, para que los estudiantes logren una adecuada exploración de los PMD en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo (ver Tabla 1).

Tabla 1. Patrones de logro para profesores asociados al procedimiento exploratorio-inductivo [Fuente: elaboración de los autores].

PATRONES DE LOGRO PARA LOS PROFESORES	CALIFICACIÓN			
	2	3	4	5
Exposición de orientaciones que favorezcan la apropiación de estrategias para la exploración de PMD.				
Desarrollo de actividades docentes que propicien la aplicación de estrategias heurísticas y metacognitivas a la exploración de PMD, para la formulación de conjeturas.				
Diseño y aplicación de un sistema de evaluación que contribuya a potenciar la formulación de conjeturas de PMD.				

Acciones a realizar por el estudiante:

- Realizar una adecuada exploración de los PMD a través de implementar diversas estrategias heurísticas. Especialmente de ensayos con casos particulares, de un caso general, de todos los casos posibles, analogías, observación de figuras, imágenes y dibujos, pero no de manera estática, sino cambiándolos e introduciendo elementos auxiliares, a fin de enlazar diversas situaciones y de establecer conexiones que sospeche que existen entre los objetos que conforman el PMD.
- Desarrollar habilidades para la observación consciente de la estructura de los PMD y la identificación de las condiciones y exigencias que los componen, así como de sus objetos, características y relaciones.
- Aprender estrategias metacognitivas que les faciliten el análisis, solución y comprobación de los PMD, distinguiendo y aplicando los procedimientos típicos para la exploración de estos, utilizando estrategias de planificación y supervisión durante el proceso resolutor y otras que le permitan detectar posibles fallas en su comprensión. Algunas de estas estrategias metacognitivas pueden ser (Schoenfeld, 1985):
  - a. No comenzar a realizar ningún tipo de acción dirigida a la solución del PMD antes de su completa comprensión y reanalizarlo, deteniendo las acciones exploratorias si al buscar una vía de solución se detecta que todavía algún elemento no ha sido correctamente comprendido.
  - b. No ejecutar operaciones engorrosas o extensas, sin haber valorado sus potencialidades como eslabones esenciales en la solución del PMD.
  - c. Cuando se conciben varios posibles vías de solución, valorar cuál de ellas es más sencilla de llevar a la práctica.

- d. Si al ejecutar una vía se observa que no conduce a la solución del PMD, re-explorar el PMD, utilizando toda la experiencia acumulada y buscar una nueva vía de solución.
  - e. Realizar el análisis de la solución y del proceso seguido para obtenerla, una vez que se ha encontrado la misma.
- Aprender a reconocer las regularidades que se manifiestan en las representaciones del PMD, a partir de la adición de información recuperada de su base de conocimientos y experiencias y del empleo de las estrategias previamente aprendidas, para visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades y propiedades.
  - Desarrollar habilidades para formular conjeturas a partir de la generalización de juicios provenientes de sus observaciones y del análisis de los indicios encontrados. Para ello deberá aprender a enunciar afirmaciones que supondrá ciertas, pero que tendrá que probar o refutar más adelante, para demostrar su veracidad o falsedad.
  - Aprender a identificar propiedades invariantes, creando representaciones de los objetos matemáticos involucrados en el PMD, para identificar aquello que es relevante y que puede orientarlo a la formulación de afirmaciones sobre las propiedades y relaciones de estos objetos.

Criterio evaluativo para los estudiantes: nivel de identificación de propiedades invariantes en representaciones de PMD, evidenciado en los resultados de la formulación de conjeturas en estos problemas (ver Tabla 2).

Tabla 2. Patrones de logro para estudiantes asociados al procedimiento exploratorio-inductivo [Fuente: elaboración de los autores].

PATRONES DE LOGRO PARA LOS ESTUDIANTES	CALIFICACIÓN			
	2	3	4	5
Aplicación de estrategias heurísticas y metacognitivas a la exploración de PMD.				
Identificación de propiedades invariantes en representaciones de PMD.				
Formulación de adecuadas conjeturas de PMD, comprobadas mediante el resultado de las evaluaciones que se realizan.				

### *Procedimiento validador-inductivo*

Acciones a realizar por el profesor:

- Facilitar el desarrollo de habilidades para el reforzamiento de la conjetura formulada. Hacer que el estudiante comprenda que todavía no se va a demostrar la conjetura, que lo que debe hacerse es probar inductivamente su validez o falsedad para nuevos casos.
- Propiciar el desarrollo de analogías con PMD ya resueltos para extraer reglas formuladas por los propios estudiantes. Es muy importante y puede desarrollarse mediante la discusión colectiva.

- Enseñar a justificar cada paso que se va dando en el proceso validativo. Promover el desarrollo de actividades docentes donde se produzcan debates para que aprendan a ser críticos en la comprobación de la validez de una conjetura y a adquirir cierto grado de escepticismo con respecto a sus razonamientos y al de los demás.
- Promover la participación activa en la generación de ideas y aplicación de métodos para el reforzamiento o refutación de la conjetura formulada. Propiciar un ambiente de trabajo activo en el aula, que permita el intercambio, la reflexión y la argumentación para que desarrollen la intuición, la imaginación y la creatividad. Así se podrán transmitir patrones de análisis de las conjeturas, aprovechando para ello su desarrollo en la pizarra, por el profesor o estudiantes aventajados.
- Propiciar el desarrollo de la habilidad de argumentar. Cada vez que se tenga la oportunidad, se debe indagar para que los estudiantes tengan que producir argumentos y justificar cada idea matemática que produzcan.
- Enseñar métodos para comprobar que una conjetura tiene alta probabilidad de ser verdadera en el contexto del problema estudiado. Los principales métodos que debe enseñar a aplicar son: el uso de contraejemplos, casos particulares, casos generales y casos extremos.
- Orientar actividades que entrenen al estudiante en el proceso de generalización de conjeturas. Hacerlos ver la conveniencia de pasar de una representación del PMD que se analiza a otra (numérica, geométrica, algebraica, tabular, conjuntista, o a una de igual naturaleza mediante relaciones equivalentes), para lograr mayor evidencia favorable sobre la validez de la conjetura y facilitar la forma de encontrar la expresión matemática generalizada de la misma.
- Diseñar y aplicar evaluaciones que le permitan profundizar en la forma en que el estudiante desarrolla el razonamiento inductivo para resolver PMD.

Criterio evaluativo para los profesores: eficacia de la explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de PMD, para que los estudiantes aprendan a validar inductivamente las conjeturas matemáticas, en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo (ver Tabla 3).

Tabla 3. Patrones de logro para profesores asociados al procedimiento validador-inductivo [Fuente: elaboración de los autores].

PATRONES DE LOGRO PARA LOS PROFESORES	CALIFICACIÓN			
	2	3	4	5
Explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de PMD.				
Desarrollo de actividades que propicien la asimilación de métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas.				
Diseño y aplicación de un sistema de evaluación que contribuya a potenciar la generalización de conjeturas de PMD.				

### Acciones a realizar por el estudiante:

- Comprender la necesidad de modificar la conjetura que se obtiene inicialmente en el proceso de razonamiento inductivo y de no considerarla legítima, hasta que se encuentre validada y reforzada por otros casos.
- Aprender a argumentar cada uno de los pasos que se dan en la validación y a seleccionar o construir casos particulares para comprobar la validez o falsedad de una conjetura.
- No conformarse con la comprobación de la conjetura para tres o cuatro casos, sino aplicarla a un número mayor, siempre que sea posible.
- Mantener cierto grado de escepticismo con respecto a sus razonamientos y el de los demás, hasta que se logre validar la conjetura bajo análisis.
- Aprender a observar, comparar y buscar analogías para rechazar o reforzar una conjetura, o bien a modificar el PMD original y buscar analogías con otros resueltos anteriormente.
- Dominar métodos útiles para validar una conjetura: contraejemplos, uso de casos particulares, de casos generales, de casos extremos, entre otros.
- Apropiarse de estrategias de autocontrol que orienten el modo de actuar para validar el grado de generalidad y veracidad de una conjetura.

*Criterio evaluativo para los estudiantes:* nivel de asimilación de métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas, evidenciado en resultados obtenidos en sus generalizaciones (ver Tabla 4).

Tabla 4. Patrones de logro para estudiantes asociados al procedimiento validador-inductivo [Fuente: elaboración de los autores].

PATRONES DE LOGRO PARA LOS ESTUDIANTES	CALIFICACIÓN			
	2	3	4	5
Asimilación de métodos efectivos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas, evidenciada en la selección que hace de estos métodos.				
Aplicación de adecuados métodos para el reforzamiento de conjeturas de PMD, evidenciada en las soluciones que aporta.				
Generalización de conjeturas de PMD, comprobadas mediante el resultado de las evaluaciones que se realizan.				

### *Procedimiento demostrativo-deductivo*

#### Acciones a realizar por el profesor:

- Propiciar el desarrollo de habilidades para realizar la selección efectiva de métodos deductivos de demostración. Proponer actividades docentes que incluyan la conceptualización consciente del modo de actuar deductivo, el aprendizaje de métodos de demostración y la estimulación de los conocimientos previos. Será conveniente que haga modificaciones al sistema axiomático propuesto en el libro, establezca el foco de atención en

el que se centrará la discusión, problematice la situación y promueva justificaciones.

- Provocar la discusión-reflexión sobre los PMD que se les proponen en un espacio de aprendizaje socializado. Esto contribuirá a que los estudiantes realicen valoraciones sobre los métodos más adecuados y la forma de aplicarlos, con lo que tendrán la oportunidad de escuchar y criticar las propuestas de sus compañeros, a la vez que apropiarse de la forma en que estos realizan sus razonamientos.
- Promover el análisis de numerosas conjeturas, explicando la importancia de profundizar en cada uno sus elementos. Deberá generarse un ambiente de clase donde prime la indagación, la comunicación y el trabajo colaborativo, características fundamentales para desarrollar la argumentación. Se podrá contribuir a que hagan valoraciones colectivas de las conjeturas y del proceso inductivo que se siguió para obtenerlas, en las que se destaquen aspectos relevantes de las mismas y de los posibles métodos a emplear para demostrarlas. Todo esto favorecerá el proceso de fijación de los conocimientos en la memoria.
- Explicar métodos para la demostración de las conjeturas. Será importante emplear métodos de enseñanza como el de ejemplificación, elaboración conjunta, conversación heurística y otros que contribuyan a los estudiantes logren una apropiación significativa de algunos métodos de demostración de conjeturas como contraejemplos, contraposición, contradicción, inducción matemática, reducción al absurdo, existencia, unicidad, vacía, trivial y regresiva-progresiva, entre otros.
- Exponer y ejemplificar la conveniencia de comenzar aplicando un método de demostración directo. Hacer entender a los estudiantes que las demostraciones pueden hacerse empleando métodos directos o indirectos, pero que siempre será conveniente comenzar aplicando un método de demostración directo y si no resulta, buscar un contraejemplo que refute la conjetura y si esto también falla, entonces hacer la demostración por métodos indirectos.
- Explicar la necesidad de involucrar, en el razonamiento lógico y deductivo que conduce a probar una conjetura, definiciones, postulados y otros teoremas, lemas y corolarios, ya probados, así como datos o condiciones establecidos en la conjetura. Para ello se debe lograr que visualicen cómo, partiendo de una conjetura generalizada y mediante una secuencia lógica de transformaciones matemáticas, se puede llegar hasta afirmaciones generalmente aceptadas (axiomas), con lo se demuestra matemáticamente la conjetura; o se llega a contradicciones entre dichos axiomas, refutando dicha conjetura.
- Propiciar el desarrollo de actividades docentes en las que el estudiante exponga y defienda sus demostraciones ante el grupo. Estas actividades

propician que el estudiante, a la vez que aprenda a defender sus ideas con argumentos sólidos, extraídos de sus propios conocimientos deductivos, amplíe su vocabulario técnico, aprenda a organizar sus ideas y a evaluar las de sus compañeros. Dichas actividades pueden desarrollarse en forma de seminarios o talleres de debate.

- Reconocer el trabajo de los estudiantes para generar argumentos que justifiquen sus demostraciones. Debe estimularse a los estudiantes, destacando sus resultados por muy discretos que estos sean, aprovechando las diferencias argumentales, valorando los tipos de razonamiento que realiza, de tal manera que éste avance hacia el rigor matemático.

Criterio evaluativo para los profesores: eficacia de la estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración, para que los estudiantes logren demostrar deductivamente las conjeturas matemáticas, en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo (ver Tabla 5).

Tabla 5. Patrones de logro para profesores asociados al procedimiento demostrativo-deductivo [Fuente: elaboración de los autores].

PATRONES DE LOGRO PARA LOS PROFESORES	CALIFICACIÓN			
	2	3	4	5
Estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración.				
Desarrollo de actividades docentes que propicien la apropiación significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas.				
Diseño y aplicación de un sistema de evaluación que contribuya a potenciar la validación deductiva de conjeturas de PMD.				

Acciones a realizar por el estudiante:

- Adquirir conocimientos significativos sobre los métodos que pueden ser empleados para demostrar las conjeturas matemáticas y la forma de aplicarlos, aprendiendo que dentro de los más efectivos suelen estar el contrarrecíproco y la contradicción.
- Dominar mecanismos que se presentan como indispensables para llegar a demostrar una conjetura: escoger el método más adecuado, derivar progresivamente y abstraer regresivamente y usar las estrategias específicas de cada método.
- Seleccionar y aplicar el método deductivo más apropiado, para someter a análisis una conjetura y tratar de asegurar su validez o falsedad.
- Apropiarse de recursos técnicos y habilidades argumentativas que le permitan fundamentar cada paso o enunciado empleado en el proceso validativo y justificar la autenticidad de los procedimientos usados.

- Aprender a expresar sus ideas con claridad, escuchar críticamente las de sus compañeros y justificar las propias.
- Encontrar argumentos pertinentes (definiciones, teoremas y corolarios) para la demostración y hacer el encadenamiento de los mismos.
- Observar que en las inferencias deductivas radica la práctica de la justificación y que para producirla hay que ir y venir de los conocimientos empíricos a la teoría, tomando las representaciones empíricas de los objetos y traduciéndolas en términos teóricos, para usarlas en la verificación de conclusiones y para buscar nuevas ideas.

Criterio evaluativo para los estudiantes: nivel de apropiación del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas, evidenciado en los resultados de la validación deductiva de conjeturas (ver Tabla 6).

Tabla 6. Patrones de logro para profesores asociados al procedimiento demostrativo-deductivo [Fuente: elaboración de los autores].

PATRONES DE LOGRO PARA LOS ESTUDIANTES	CALIFICACIÓN			
	2	3	4	5
Adecuada búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración.				
Apropiación significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas, evidenciada en las soluciones que propone.				
Validaciones deductivas de conjeturas de PMD, comprobadas mediante el resultado de las evaluaciones que se realizan.				

Se considera que el método didáctico presentado, a través de sus tres procedimientos didácticos, está en condiciones de ser aplicado para perfeccionar la orientación de profesores y estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los problemas matemáticos de demostración, en carreras universitarias de ciencias exactas.

## CONCLUSIONES

Al profundizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos de demostración, se evidenciaron insuficiencias relativas al limitado tratamiento que se da al razonamiento inductivo en el mismo; situación expresada en el predominio del uso del razonamiento deductivo, que es muy importante, pero por sí solo no facilita profundizar en la didáctica de la resolución de problemas de demostración.

El método didáctico propuesto consta de tres procedimientos que permiten instrumentar el proceder didáctico-metodológico para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, en aras de potenciar la formación de habilidades resolutoras, imprescindible para los profesionales de las carreras universitarias de ciencias exactas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Allen, L. G. (2001). Teaching mathematical induction. An alternative approach. *Mathematics Teacher*, 94 (6), pp. 500-504.
- Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación*. Disertación Doctoral (inédita), Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran", Universidad de Oriente, Cuba.
- Alonso, I., Gorina, A. & Santiesteban, Y. (2012). El proceso de formación del valor de la perseverancia en la resolución de problemas matemáticos. *Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 3(4), pp. 69-82.
- Álvarez, J., Alonso, I. & Salgado, A. (2016). Resolución de problemas matemáticos en la Licenciatura en Educación Matemática-Física. *Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa (REFCaE)*, 4 (1), pp. 67-82.
- Álvarez, M., Alonso, I. & Gorina, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (25), pp. 625-634.
- Bell, A., Burkhardt, H., Crust, R., Pead, D. & Swan, M. (2004). *Strategies for problem solving and Proof*. En *International Perspective on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 129-143). Sweden: Göteborg University.
- Beyer, W. O (2008). Algunas precisiones acerca de la resolución de problemas y de su implementación en el aula. *Paradigma*, 19(1), 39-55.
- Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. En F. Le Lionnais. *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Paris: Cahiers du sud.
- Cabrales, Y., Silva, J. L., & Domínguez, A. (2016). Procedimiento didáctico para la resolución de problemas matemáticos. *Revista Boletín REDIPE*, 5(4), 34-41.
- Godino, J. & Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), pp. 405-414.
- Gorina, A. & Domínguez, S. (2012). La resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En *Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática*, Nesterova, Ulloa, Pantoja (Coords.). Vol. 1. Colección Monografías de la Academia 2008-2009, (pp. 356-374). UG, México: Editorial Universitaria.
- Larios, V. (2002). *Demostraciones y conjeturas en la escuela*. Obtenida el 12 de enero de 2018, de <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/>
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68.
- Morales, C. A. (2008). *Los métodos de demostración en matemática*. Tesis de maestría. Universidad de San Carlos, Obtenida el 29 de septiembre de 2017, de [http://biblioteca.usac.edu.gt/tesis/07/07\\_1914.pdf](http://biblioteca.usac.edu.gt/tesis/07/07_1914.pdf)
- Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Editorial TECNOS. S. A.
- Stacey, K. & Groves, S. (1999). *Resolver problemas: estrategias. Unidades para desarrollar el pensamiento matemático*. Madrid: Narcea.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. California: Academic Press, INC. USA.

