PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL EN UNA VARIABLE

EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL EN UNA VARIABLE

AUTORES: Rogelio Acosta González[1]

Lázaro Francisco Acosta Ruiz[2]

María Cristina Pérez Lazo de la Vega[3]

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: E-mail: racostag2014@gmail.com

Fecha de recepción: 12-06-2014

Fecha de aceptación: 22-07-2014

RESUMEN

La integral definida es el concepto clave del cálculo integral en una variable. Favorecer su aprendizaje es el objetivo fundamental de la propuesta didáctica que se presenta. Un sistema de principios teóricos-metodológicos, que se aplica en tres etapas, constituye el fundamento conceptual de la propuesta. En la primera etapa se establece la secuencia del contenido. En la segunda etapa se elaboran los medios didácticos necesarios: un folleto (en formato pdf), un sistema de hojas de trabajo (pdf), una colección de ejemplos de integrales definidas calculadas por métodos geométricos (en Power Point) y una serie de actividades concebidas con el Software de Geometría Dinámica GeoGebra (formato ggb). La tercera etapa se concreta con la puesta en práctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática I para carreras de Ciencias Técnicas.

Palabras clave: Cálculo integral; GeoGebra; métodos geométricos

DIDACTIC PROPOSAL FOR THE DEVELOPMENT OF THE TEACHING-LEARNING PROCESS OF INTEGRAL CALCULATION IN A VARIABLE

ABSTRACT

The definite integral is the key concept of the integral calculus in one variable. Deepen their learning is the fundamental objective of the didactic

[1] Licenciado en Matemática, Profesor Auxiliar, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Técnicas, Universidad de Las Tunas, Cuba.

[2] Ingeniero eléctrico, Profesor Auxiliar, Doctor en Ciencias Pedagógicas, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico Julio Antonio Echeverría. La Habana, Cuba. E-mail: facosta@mecanica.cujae.edu.cu

[3] Licenciada en Matemática, Profesora Titular, Doctora en Ciencias Pedagógicas, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico Julio Antonio Echeverría, La Habana, Cuba. E-mail: mcldelavega@mecanica.cujae.edu.cu

proposal presented. A system of theoretical and methodological principles, applied in three stages, is the conceptual foundation of the proposal. In the first step the content sequence is established. In the second step, the necessary teaching aids are elaborated: a brochure (in pdf format), a set of worksheets (pdf), a collection of examples of definite integrals calculated by geometrical methods (in Power Point) and a series of activities designed with GeoGebra Dynamic Geometry Software (ggb format). The third stage takes shape with the implementation in the teaching - learning process of the subject Mathematics I for the Technical Sciences career.

KEYWORDS: Integral Calculus; Geogebra; geometrical methods

INTRODUCCIÓN

La integración de funciones reales de una variable real se desarrolla en las disciplinas de formación matemática para los años iniciales en carreras de perfiles agropecuarios, técnicos y económicos, entre otras. Es frecuente en el aula, y en muchos textos, que se inicie la exposición con las integrales indefinidas, enfoque que garantiza que al tratar las definidas se disponga de los medios para evaluarlas con relativa sencillez y eficiencia.

Menos común, aunque también legítimo, es comenzar con las integrales definidas. Este ordenamiento es el que se sigue, por ejemplo, en *Cálculo con trascendentes tempranas* (Stewart, 2002), libro que se utiliza en Cuba como texto básico para las carreras de Ciencias Técnicas con la introducción de los Planes de Estudio D (MES, 2007). Durante varios cursos, el primero de los autores ha seguido este orden, etapa en el cual ha procurado fundamentar sus ventajas, concibiendo y desarrollando medios didácticos para su puesta en práctica (Acosta, R., 1999, 2000, 2001, 2010).

Sea uno u otro el orden que se asuma, al tratar la integral definida se requiere definir este concepto como un límite. Sobre esta base se establecen sus interpretaciones, propiedades y aplicaciones. Para el tratamiento de este contenido no se necesita de la fórmula de Newton−Leibniz, ni de los conceptos de primitiva e integral indefinida.

La necesidad de introducir la fórmula de Newton−Leibniz lo antes posible, atendiendo a las dificultades que comporta el proceso de evaluación de una integral definida cuando se utiliza únicamente la definición, mediante el límite de las sumas integrales, se refleja en cómo se trata usualmente la integración en los textos y en el aula; principalmente en esta última, donde la disponibilidad de tiempo es limitada.

El tránsito acelerado que entonces se lleva a cabo, desde los aspectos conceptuales hasta los procedimentales, puede tener un efecto negativo sobre los primeros, porque se corre el riesgo de que las habilidades de cálculo analítico de integrales definidas se logren al margen o en detrimento de la comprensión conceptual, que es sin duda alguna la cuestión más importante que se debe atender en la formación matemática de los estudiantes. Aquí se asume que mantiene plena vigencia la primera recomendación de la *Conferencia para la Reforma del Cálculo*: «…*concentrarse en la comprensión de los conceptos…*», *Universidad de Tulane*, 1986, citada por Stewart (Stewart, 2002).

De las consideraciones anteriores se revela una contradicción. De una parte se tiene la necesidad de disponer tempranamente de la fórmula de Newton−Leibniz, como medio eficiente para calcular integrales definidas, ante los inconvenientes prácticos que se presentan al hacerlo mediante la definición. Por otro lado, se puede comprometer la comprensión conceptual si no se mantiene el foco de atención de los estudiantes sobre el concepto, las propiedades, interpretaciones y aplicaciones de la integral definida. Esta contradicción parece insoluble si se reconoce que para favorecer la comprensión de un concepto se tiene que trabajar directamente con su definición, sus propiedades, interpretaciones y aplicaciones, proceso que en el caso de la integral definida supone, entre otras cosas, que sean utilizadas para la evaluación de suficientes ejemplos, en un contexto que se caracteriza por las limitaciones de tiempo.

¿Es una contradicción sin solución? ¿Será aconsejable demorar la introducción de la fórmula de Newton−Leibniz y concentrar los esfuerzos iniciales en promover la comprensión conceptual, mediante el desarrollo de actividades concebidas para que los estudiantes utilicen la definición, interpretaciones, propiedades y aplicaciones para evaluar integrales definidas? Si se puede dar una respuesta afirmativa a esta última cuestión, entonces se plantean otras interrogantes: ¿Qué costos tendrá, en términos de tiempo y de otros recursos? En particular, ¿sobre qué fundamentos conceptuales y metodológicos sustentarla? ¿Qué soportes bibliográficos y de otros medios didácticos se requieren? ¿Qué roles asignar a docentes y estudiantes? ¿Mejora realmente la comprensión conceptual?

En el trabajo se plantean posibles respuestas a algunas de estas cuestiones. La idea básica es la siguiente: mediante procedimientos geométricos intuitivos y asequibles, como son los de rotación, traslación y reflexión, junto con conocimientos previos sobre longitudes, áreas y volúmenes, se pueden evaluar integrales definidas de funciones no lineales, con un costo aceptable de tiempo. El proceso de evaluación se concibe con la participación activa de los estudiantes, se apoya en la definición, recurriendo a las propiedades, interpretaciones y aplicaciones de la integral definida y se materializa en el proceso docente con el empleo de aplicaciones informáticas educativas, que son medios digitales en distintos soportes, entre los que se incluyen un folleto y un sistema de hojas de trabajo (en formato pdf) y un conjunto de ejemplos de integrales definidas calculadas mediante procedimientos geométricos (formato ppt).

Para evaluar integrales apelando a sus interpretaciones, propiedades y aplicaciones es una condición necesaria que estén disponibles estos aspectos, así como garantizar que los estudiantes muestren dominio sobre ellos. En este sentido, se concibió una colección de actividades desarrolladas sobre *Geogebra*, un software de *Geometría Dinámica*, sobre las interpretaciones, propiedades y aplicaciones de la integral definida, donde las mismas posibilidades dinámicas son las que favorecen que el estudiante se convierta en sujeto activo de su propio proceso de aprendizaje, lo que aumenta las probabilidades de que se produzca. Para este propósito resultaron esenciales las experiencias metodológicas y prácticas acumuladas, en las asignaturas Geometría Descriptiva y Dibujo, por los dos autores del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echavarría (CUJAE) (Acosta, F. y otros 2013).

La propuesta se ejecuta en tres etapas, a saber:

Etapa 1. Se asume y fundamenta un ordenamiento para el contenido.

Etapa 2. Se conciben, diseñan y desarrollan los medios didácticos necesarios, así como se definen el objetivo y el contexto para la utilización de cada uno de los medios.

Etapa 3. Se materializa con la puesta en práctica en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Integral de funciones reales de una variable real.

En cada una de las etapas se aplica el sistema de principios teóricos-metodológicos que el primero de los autores presentó en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa XVI, celebrada en la CUJAE en julio de 2002 (Acosta, R., Hernández, H., 2002). Este sistema de principios se fundamenta, a su vez, en el enfoque histórico cultural de Vigotski y sus continuadores.

DESARROLLO

Antes de proceder a presentar cada una de las etapas de la propuesta, así como a caracterizar algunos de los medios didácticos concebidos, seguidamente se relacionan los principios teóricos-metodológicos que fundamentan cada una de las etapas de la propuesta. Se incluye una breve descripción de cada uno de ellos.

Principios teóricos-metodológicos

Principio de activación de conocimientos. Se propicia que el estudiante recupere de manera individual, o como resultado de su interacción con sus compañeros de grupo en el desarrollo de una actividad conjunta, un conocimiento asimilado, relacionado con el objeto de aprendizaje que se esté considerando. Se concreta por medio de preguntas dirigidas a esa búsqueda, preguntas que implican una reflexión consciente y que constituyen una ayuda en tanto presuponen una orientación de esa actividad. Se puede concretar también a través de ejemplos o resultar de la aplicación del siguiente principio.

Principio de recurrencia. Expresa la intención y el hecho de recurrir reiteradamente a un determinado objeto o resultado matemático —un concepto, un teorema o propiedad, una interpretación, un ejemplo— lo que permite recuperar, con poco gasto de recursos cognitivos, un conocimiento asimilado. Al propio tiempo que se recurre a un objeto en una relación espacio-temporal determinada para utilizarlo, se le pueden incorporar nuevas características o bien darse otras interpretaciones a atributos ya establecidos, ahora a la luz de otros marcos conceptuales o de nuevos sistemas de conocimientos.

Principio de agotar potencialidades. Permite agotar al máximo las posibilidades que sobre un objeto de aprendizaje sean asequibles y pertinentes al estudiante en una relación espacio-temporal determinada. Asimismo, propicia que en el aquí y ahora se asimile ese objeto que se sabe necesario retomar en otro momento, lo que remarca su relación recíproca con el principio de activación de conocimientos.

Principio de significación y pertinencia. Permite acotar el marco de aplicación del principio anterior, toda vez que en un contexto dado puede que no se requiera o no sea pertinente algún resultado que en potencia sería posible obtener. Por ejemplo, aunque potencialmente es posible fundamentar el *Método de los Mínimos Cuadrados* a partir de la optimización en varias variables, puede que en alguna carrera, o en algún contexto específico dentro de una carrera, no se necesite esa fundamentación. Incluso, puede suceder que tal método no esté previsto curricularmente, así que aunque pueda obtenerse y fundamentarse, no tendría significado alguno hacerlo en esa situación.

Principio de promoción y resolución de conflictos. Este principio está dirigido a propiciar que el estudiante se haga consciente, por percatarse por sí mismo o con ayuda, de que son insuficientes los recursos de que dispone para resolver un problema y de la necesidad de búsqueda y aprendizaje de otros conocimientos para ello. El conflicto motiva el aprendizaje, obliga a plantear alternativas de solución y a tomar partido técnico, propicia la formulación de conjeturas, el argumentar las ideas y a convencer al otro; en definitiva, a resolverlo como sujeto individual en la interacción social.

Principio de aislar complejidades. Con este principio, cuya aplicación en un contexto determinado es posible en relación dialéctica con los de *agotar potencialidades*, el de *activar conocimientos* y el de *recurrencia*, se expresa la necesidad de no considerar en paralelo con objetos de aprendizaje de elevada complejidad otros que sea posible tratar en otro momento, básicamente con antelación.

Principio de control y regulación. El control, como uno de los componentes de la actividad humana; en particular, de la actividad de aprendizaje en su sentido de enriquecimiento y transformación del conocimiento, exige de la regulación como elemento de intervención, de corrección. Este principio se concreta en la práctica cuando de las actividades de aprendizaje en las que se involucra el estudiante, como parte integrante de un pequeño grupo cooperativo o por sus propias interacciones con el objeto de aprendizaje, se hacen explícitos resultados que constituyen indicadores que propician el control y la eventual regulación.

Los principios enunciados anteriormente se integran entre sí para la ejecución de las tres etapas de la propuesta, aunque no se indicará explícitamente cada vez cómo y cuándo se utiliza cada uno de ellos. No obstante, puede decirse que la idea básica para concebir las actividades (etapa 2) es que, en su puesta en práctica con los estudiantes (etapa 3), se fomente la creación de zonas de desarrollo próximo, que se configuran primero a nivel individual y derivan finalmente en zonas de desarrollo próximo grupales. Al propio tiempo, tales actividades sobre objetos de conocimiento específicos del Cálculo Integral de funciones reales de una variable solo son posibles si previamente se definió un ordenamiento (etapa 1) para esta temática. De ese modo, dada la total interrelación entre las etapas y los propósitos enunciados, toda referencia a la utilización del sistema de principios, o de uno de ellos, en algún momento de la propuesta, es al mismo tiempo una constatación de su utilización a lo largo de toda la propuesta.

Etapa 1. *Un ordenamiento del cálculo integral de funciones reales de una variable real*

Si bien se considera que la propuesta que se hace, y los medios que se conciben como parte de su implementación, se pueden aplicar con independencia de a cuál integral, entre la indefinida y la definida, se dé precedencia, se optó por asumir el ordenamiento que se determina luego de comenzar con la integral definida, lo que es coherente con el que ha seguido el primero de los autores en otros de sus trabajos y coincide con el que aparece en el libro de texto.

Se debe señalar que la concepción que se defiende al dar prioridad a la integral definida sobre la indefinida se fundamenta en razones que trascienden el simple hecho de una preferencia, y atienden a cuestiones *históricas* (los orígenes de las integrales definidas se remontan a los trabajos de Arquímedes, hace más de 2300 años) y *didácticas* (las integrales indefinidas se introducen luego que se haga *evidente a los estudiantes* el papel que desempeñan para poder calcular una integral definida, porque al hacerlo antes se tienen que posponer las evidencias sobre su utilidad para ese propósito).

Al mismo tiempo, junto con las razones históricas y didácticas mencionadas, se podrían agregar razones *contextuales*. En efecto, en la actualidad, con las potencialidades que brindan los recursos informáticos, se favorece la comprensión conceptual por encima del cálculo y por eso cada vez es más evidente el corrimiento en las funciones de la matemática, desde un potente instrumento para el cálculo, incluido el cálculo analítico propio de las matemáticas superiores, hacia ser fuente de modelos.

A la vez que constituye el principal modelo matemático que emerge del Cálculo Integral de funciones reales de una variable real, la integral definida requiere de una serie de conceptos relacionados, como son los de trapecio curvilíneo y área. En relación con este último, es ideal para poner en evidencias las limitaciones del aparato matemático que trae consigo el estudiante que ingresa a la universidad, no ya por una deficiente formación precedente; más bien como consecuencia de la imposibilidad de resolver, con ese aparato matemático, problemas relativamente sencillos, como puede ser, por ejemplo, el problema de determinar el área de un trapecio curvilíneo dado o la imposibilidad de justificar, solo con esos recursos, resultados tan comunes como es la conocida fórmula para el área de un círculo: $A = \pi r^2$, donde A es el área y r es el radio del círculo.

En conclusión, el ordenamiento que se asume da precedencia a la integral definida y se organiza la totalidad del proceso de enseñanza aprendizaje a partir de él.

Etapa 2. *Elaboración de los medios didácticos necesarios*

Si bien todos los medios que se conciben, diseñan y elaboran en esta etapa tienen en común el objetivo esencial de favorecer el aprendizaje por parte de los estudiantes del Cálculo Integral de funciones reales de una variable, en particular de la integral definida, ellos presentan entre sí diferencias notables en cuanto al soporte, así como con respecto al objetivo específico a lograr con su utilización.

Se identifican tres momentos principales dentro del proceso, que determinan una primera diferenciación entre los medios didácticos y entre los usos que se reserva a los mismos. No obstante, conviene aclarar que si bien para propósitos de presentación y explicación de la propuesta es conveniente hablar de momentos dentro del proceso, la realidad es que dentro de él todo está interconectado, de manera que un mismo medio puede utilizarse para más de un propósito y en más de un momento.

Un primer momento corresponde a la fase de *planteamiento de problemas* y *la promoción de conflictos*. Aquí el propósito fundamental es el de poner en evidencia las limitaciones del aparato conceptual o de cálculo analítico que esté disponible para resolver determinados problemas, y así hacer explícita la necesidad de incorporar nuevos conocimientos, o bien de nuevos procedimientos de trabajo con conocimientos ya establecidos. Por ejemplo, al plantear inicialmente el problema de determinar el área de un trapecio curvilíneo correspondiente a una función no lineal, se está promoviendo un conflicto, porque el aparato matemático disponible no es suficiente para resolverlo.

Para este primer momento se concibió un sistema formado por ocho hojas de trabajo, que están disponibles en formato digital y pueden ser visualizadas o descargadas por parte de los estudiantes. Algunas hojas, o problemas dentro de alguna de ellas, se relacionan con los otros dos momentos y se utilizan en ellos. Estos dos momentos se enuncian seguidamente. También aquí pueden utilizarse otros de los medios.

El segundo momento corresponde a la formulación de conjeturas con respecto a nuevos conocimientos, con los que se opera a nivel no formalizado. Aquí desempeñan un rol fundamental las actividades desarrolladas con GeoGebra, un software de Geometría Dinámica, aunque también ocupa un lugar importante una colección de 17 ejemplos de integrales definidas calculadas mediante procedimientos geométricos; estos resultados, a su vez, se utilizan luego para obtener evidencia del cumplimiento de la fórmula de Newton Leibniz.

El tercer momento corresponde a actividades en la que se opera con los conceptos y los procedimientos de trabajo a nivel formalizado, donde se confirman o refutan las conjeturas que pueden haber formulado los estudiantes y se desarrollan habilidades. Este momento se presenta, en particular, en sesiones plenarias en el aula, luego de algún eventual trabajo individual o grupal por parte de los estudiantes o sencillamente en el marco de alguna exposición del profesor, como parte de una conferencia. Aquí no necesariamente tiene que intervenir el profesor. El trabajo, bajo su orientación y control, puede desarrollarse con el folleto o bien con el libro de texto, o con algún medio que sirva estos fines.

En resumen, los medios desarrollados y otros disponibles son los siguientes:

Un folleto de 40 páginas sobre la integral definida en el marco de un ordenamiento en el cual se concede precedencia a la integral definida sobre la indefinida. Culmina con la introducción de la integral indefinida, luego de evidenciarse, mediante la resolución de ejemplos y las observaciones correspondientes, que son necesarias para calcular eficientemente una integral definida si está disponible una primitiva del integrando.

Un sistema de 8 hojas de trabajo (16 páginas), donde se problematiza el contenido desarrollado en el folleto. Se conciben para ser utilizadas en actividades grupales. Más adelante se incluye una hoja como muestra. Tanto este sistema de hojas de trabajo, como el folleto, se presentan en formato pdf y están disponibles en la WEB de la universidad.

Una colección de 17 ejemplos de integrales definidas de funciones, la mayoría de ellas no triviales, por corresponder a funciones no lineales. Estos ejemplos se calculan apelando exclusivamente a procedimientos geométricos, para lo que se utilizan propiedades, aplicaciones e interpretaciones de la integral definida. Para cada ejemplo, se diseña una actividad que tiene el propósito de obtener evidencia del cumplimiento de la fórmula de Newton Leibniz. Se agrupan en un único fichero en formato pps, en el que se expresa cierto grado de interactividad. Se presenta uno de los ejemplos y la actividad correspondiente.

Un conjunto de 12 actividades desarrolladas con GeoGebra. Estas actividades son las últimas en elaborarse y serán introducidas a partir del próximo curso en las carreras de Informática e Industrial, en la Universidad de las Tunas.

Un ejemplo de hoja de trabajo

Tema: Cálculo integral de funciones reales de una variable real

Contenido: Áreas de figuras planas

Objetivos:

1. Propiciar la recuperación y activación por parte del estudiante de conocimientos previos sobre áreas de figuras planas que están limitadas por segmentos de recta.
2. Que el estudiante constate la insuficiencia de los métodos elementales de cálculo de áreas para determinar el área de una región plana que no está completamente limitada por segmentos de recta.
3. Ilustrar un procedimiento que permite obtener una fórmula para calcular el área del círculo, y así contribuir a revelar la necesidad de un proceso de paso al límite como medio para definir y determinar el área de una región plana que no está completamente limitada por segmentos de recta.

Problema 1.1

Dibuja la figura y escribe una fórmula que permita calcular el área en cada uno de los casos siguientes.

1.1.1. Rectángulo con lados de longitudes a y b.

1.1.2. Triángulo rectángulo con catetos de longitudes a y b.

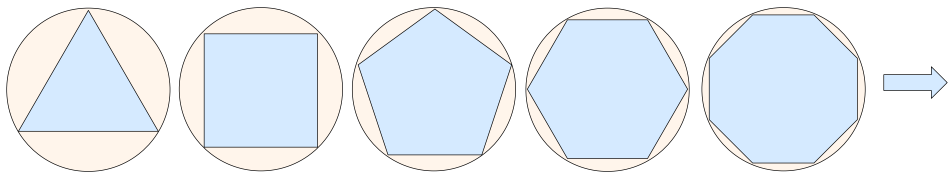
1.1.3. Triángulo equilátero con lados de longitud p.

1.1.4. Trapecio con dos ángulos rectos, bases de longitudes a y b y altura de longitud h.

1.1.5. La región en el intervalo $[0, 2\pi]$ por debajo de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ que está por encima del eje x.

Problema 1.2

El cuadrado que resulta del rectángulo al tomar iguales sus lados, el triángulo equilátero y el hexágono regular son polígonos regulares. Cada



polígono regular puede inscribirse en una circunferencia, llamada circunferencia circunscrita. El área de un polígono regular se expresa mediante la fórmula $A_n = \frac{nr^2}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$, donde n es un número natural $(n \geq 3)$ con el que se designa la cantidad de lados y r es el radio de la circunferencia circunscrita. Con la figura se pretende ilustrar que el área del círculo se aproxima con el área del polígono regular inscrito y que esa aproximación es tanto mejor como mayor sea el número de lados.

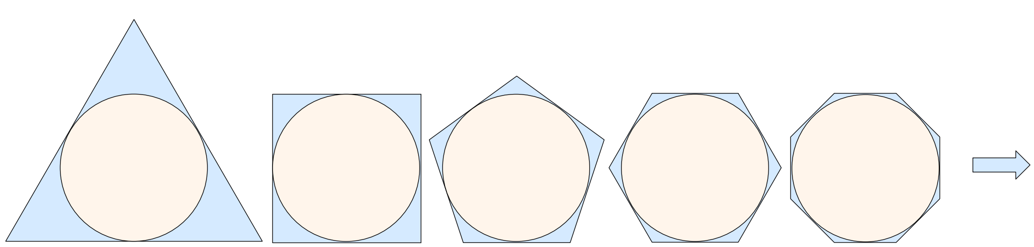
1.2.1. Verifica que $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{nr^2}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = \pi r^2$; es decir, que la fórmula para el área del círculo de radio r: $A = \pi r^2$, es el límite del área del polígono regular inscrito en la circunferencia que lo limita, cuando tiende a infinito el número de lados.

Indicación: Aplica la generalización del límite fundamental trigonométrico; para ello, divide y multiplica por el argumento $\frac{2\pi}{n}$.

Observación: En lugar de polígonos inscritos en la circunferencia de radio *r*, se podrían utilizar polígonos regulares circunscritos.

1.2.2. ¿También en ese caso podrá obtenerse que $A = \pi r^2$ determinando para ello el límite del área del polígono regular circunscrito a la circunferencia de radio *r*?

Indicación: La fórmula que permite calcular el área del polígono regular de *n*



lados que circunscribe a la circunferencia de radio *r* es $P_n = nr^2 \tan\frac{\pi}{n}$.

Problema 1.3

Un trapecio curvilíneo es la región plana limitada por arriba por la gráfica de una función $y = f(x)$, continua y no negativa en un intervalo cerrado $[a, b]$, por debajo por el segmento del eje de las x que es la representación geométrica de $[a, b]$, por la izquierda por el segmento con extremos en los puntos de coordenadas $(a, 0)$ y $(a, f(a))$ y por la derecha por el segmento con extremos en los puntos de coordenadas $(b, 0)$ y $(b, f(b))$. En general, el área de un trapecio curvilíneo no se puede determinar con las fórmulas anteriores, aunque se puede aproximar y acotar con ayuda de ellas.

1.3.1. Considera el trapecio curvilíneo que está limitado por arriba por la gráfica de la función exponencial natural $f(x) = e^x$ y por debajo por el eje x, entre 0 y 1, que se define así: $R_1 = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le y \le e^x;\ 0 \le x \le 1\}$. Dibuja esta región y demuestra que su área es mayor que 1 y menor que e.

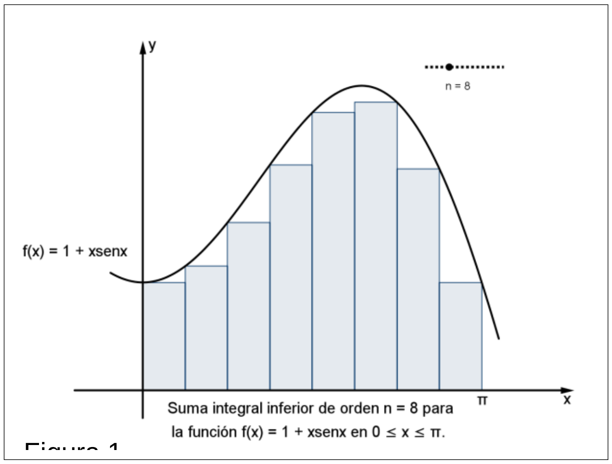
1.3.2. Considera el trapecio curvilíneo que está limitado por arriba por la gráfica de la función cuadrática $g(x) = x^2 + 2$ y por debajo por el eje x, entre 0 y 2, que se define así: $R_2 = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le y \le x^2 + 2; 0 \le x \le 2\}$. Dibuja la región y demuestra que su área es mayor que 4 y menor que 12.

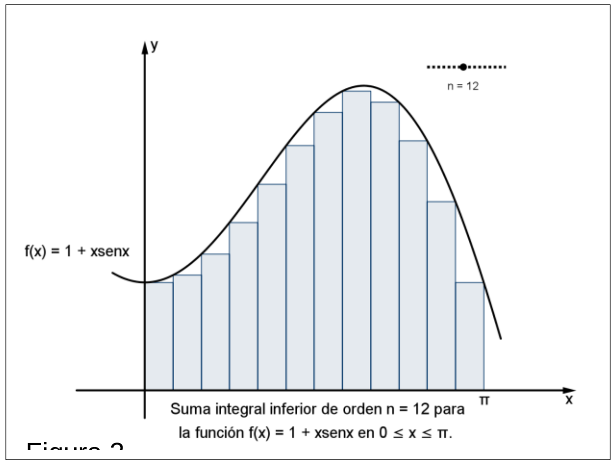
1.3.3. Considera el trapecio curvilíneo que está limitado por arriba por la gráfica de la función $h(x) = 1/x$ y por debajo por el eje x, entre 1 y 2, que se define así: $R_3 = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le y \le 1/x;\ 1 \le x \le 2\}$. Dibuja la región y luego demuestra que su área es mayor que 1/2 y menor que 1.

1.3.4. ¿Podrá calcularse exactamente el área de un trapecio curvilíneo? Con otras palabras: ¿Podrá definirse y calcularse el área de un trapecio curvilíneo como resultado de un proceso de paso al límite similar al utilizado en el problema 1.2?

Descripción de una actividad sobre GeoGebra

Las figuras 1 y 2 *pueden resultar* de la ejecución de una misma actividad concebida con GeoGebra. Esta actividad puede servir a múltiples propósitos. En ella, el estudiante puede manipular a su antojo; en particular, puede modificar libremente la cantidad de rectángulos que forman la suma integral inferior entre 1 y 30, que fueron las cantidades diseñadas, simplemente arrastrando el *deslizador* (punto o círculo negro en el segmento que se muestra arriba a la derecha). Puede modificar el valor superior 30 por algún natural mayor. En esa misma actividad se pudo escoger trabajar con la suma integral superior.





Precisamente, por la posibilidad que tiene el estudiante de decidir qué valor o valores atribuir a n en su ejecución de la actividad, es que se utilizó inicialmente la frase *pueden resultar*, toda vez que si no detiene el deslizador en los valores $n = 8$ y $n = 12$, entonces no se verá fija en pantalla una gráfica como las que constituyen las figuras 1 y 2.

En esta actividad el estudiante puede elaborar conjeturas relativas al comportamiento de las sumas integrales inferiores y superiores. Puede concluir, por ejemplo, que las sumas integrales inferiores *crecen* junto con n y que las sumas integrales superiores *decrecen* cuando n se incrementa (aquí es oportuno notar que a los valores de esas sumas se accede con un simple clic). También puede elegir ver simultáneamente ambas sumas y apreciar que el área del trapecio curvilíneo queda comprendida entre ambas sumas. Se puede simular la convergencia de las sumas integrales a la integral definida correspondiente. En fin, toda una amplia gama de posibilidades para visualizar, interactuar y para conjeturar.

Ejemplo empleando procedimientos geométricos

Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son no negativas en $[0, \pi/2]$. Los trapecios curvilíneos que ambas determinan en este intervalo son congruentes, ya que cualquiera de ellos es el reflejo del otro con respecto a la recta paralela al eje de las ordenadas por el punto $x = \pi/4$.

Por lo tanto, si esos trapecios rotan alrededor del eje x, se forman cuerpos de revolución del mismo volumen V (en la figura 3 se representa el cuerpo que se obtiene de $g(x) = \cos x$). Al aplicar a estas funciones la fórmula (4), resulta

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx.$$

El valor $V = \pi^2/4$ se obtiene de la siguiente secuencia de igualdades:

$$2V = \pi \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x dx + \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow V = \frac{\pi^2}{4},$$

consecuencia de utilizar la propiedad de linealidad, luego la identidad trigonométrica fundamental y finalmente la interpretación de la última integral a la derecha como la medida del área del rectángulo de base $\pi/2$ y altura 1, que es el trapecio curvilíneo determinado por la función constante $h(x) = 1$ en $[0, \pi/2]$.

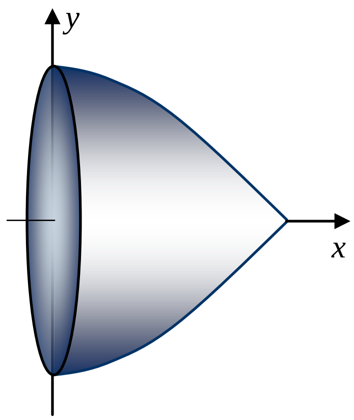


Figura 3. Cuerpo de revolución que se obtiene de la rotación alrededor del eje de las x del trapecio curvilíneo determinado por $g(x) = \cos x$ en $[0,\pi/2]$.

Sustituyendo $V = \pi^2/4$ y multiplicando todos los miembros por $1/\pi$, se obtienen las integrales

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

Etapa 3. *Puesta en práctica*

Si bien muchas de las actividades que forman parte de la propuesta se han llevado a la práctica, ahora incluye actividades desarrolladas con el software de Geometría Dinámica GeoGebra, que no se han utilizado en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Integral de funciones reales de una variable. En consecuencia, se considera no reseñar hechos relativos a la puesta en práctica, lo que no desconoce la importancia de diseñar instrumentos que permitan evaluar en qué medida se favorece el aprendizaje de esta temática.

CONCLUSIONES

La integral definida se introduce usualmente en relación con el problema del área de un trapecio curvilíneo. Las propiedades, interpretaciones y aplicaciones de este concepto se establecen como consecuencia de su definición como un límite, sin que se tenga que tomar en cuenta la fórmula de Newton−Leibniz.

La fórmula de Newton−Leibniz se introduce en los textos y en el aula muy rápido. Asumir esta tendencia puede implicar un costo en cuanto a la comprensión conceptual.

De la utilización del concepto y sus interpretaciones se obtuvieron procedimientos geométricos que permitieron evaluar varias integrales definidas con un gasto aceptable de tiempo. Los procedimientos descritos se basan en movilizar, junto con las interpretaciones de la integral definida, una serie de conceptos y resultados previos sobre funciones, áreas y volúmenes, traslaciones y otros medios geométricos. Estos recursos son asequibles a los estudiantes en virtud de que se apela en ellos a la intuición y porque pueden ser recuperados y activados como parte del proceso de su utilización. Lo señalado apunta a la importante cuestión de promover la comprensión conceptual, aspecto clave en la formación matemática de los estudiantes.

Finalmente, se conciben actividades con el propósito de propiciar que los estudiantes se involucren de forma consciente y sistemática como sujetos activos de su propio aprendizaje sobre contenidos importantes del cálculo integral de funciones reales de una variable real.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, F., Pérez, M. y Saidon, L (2013). *Aplicación del enfoque dinámico de la enseñanza en las Ciencias Técnicas*. I Taller Nacional de Ingeniería Industrial, Universidad Vladimir I. Lenin, Las Tunas.

Acosta, R. (1999). *Integral definida o indefinida: ¿Cuál primero?* Actas del Primer Taller Internacional INNOED, Siglo XXI. Las Tunas, Cuba.

Acosta, R. (2001). *Una alternativa didáctica para el aprendizaje del cálculo integral*. Actas del Segundo Taller Internacional INNOED, Siglo XXI. Las Tunas, Cuba.

Acosta, R. (2010). *Fundamentos para la organización del cálculo integral en un tema único, focalizado en la integral definida*. Actas del VI Congreso Internacional Didácticas de las Ciencias. La Habana, Cuba. Disponible en http://www.congreso.rimed.cu/.

Acosta, R., Hernández, H. (2002). *Principios teóricos metodológicos para secuenciar el sistema de conocimientos del Cálculo Diferencial.* Actas de RELME XVI, La Habana, Cuba.

Campistrous, L; Rizo, C. (2007). *El proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en las nuevas condiciones del desarrollo de la tecnología*. Congreso Nacional de Matemática. Holguín. Cuba. Noviembre 2007.

Fikhtengol'ts, G. M. (1979). *The fundamentals of mathematical analysis*. Volume 1. Pergamon Press. Gran Bretaña.

GeoGebra Community News. (2012). *Boletín mensual*. www.GeoGebra.org.

Goberna, M. A., López, M. A., Pastor, J. T. (1992). *La cara oculta de la matemática*. Universidad de Alicante. España.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Editorial MIR. Moscú, Rusia.

Schoenfeld, A. (2000). *Purposes and methods of research in mathematics education*. Notices of the AMS, Volume 47, Number 6; June/July 2000.

Souto, B. (2009). *Visualización en matemáticas. Un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Complutense de Madrid. España.

Spìvak, M. (1974). *Calculus*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.

Stewart, J. (2002). *Cálculo con trascendentes tempranas*. Internacional Thomson Editores. México.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.